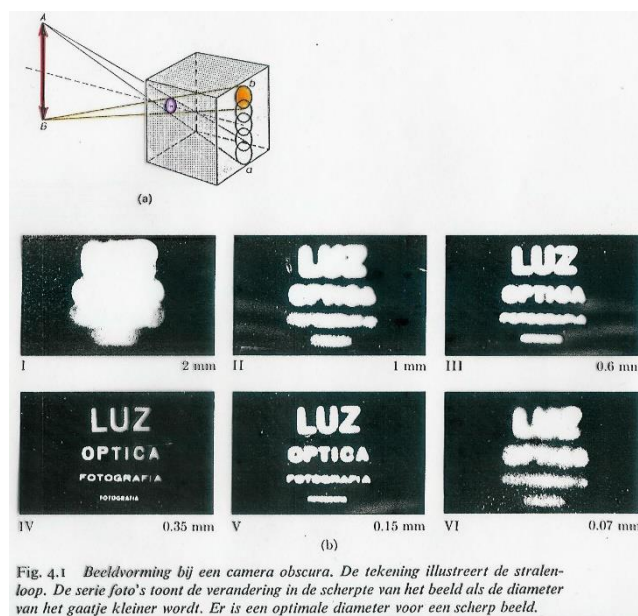


HOOFDSTUK V : GEOMETRISCHE OPTICA

V.1. INLEIDING

Licht is een elektromagnetische golf die dus eigenlijk in termen van een golftheorie dient behandeld te worden. Dit impliceert het gebruik van golffronten bij de studie van de voortplanting en het expliciet in rekening brengen van de golflengte van het gebruikte licht. In de fysische optica worden op die manier verschijnselen zoals interferentie en diffractie (buiging) van licht verklaard. Er bestaan echter ook enkele benaderende theorieën die voor bepaalde doeleinden of in bepaalde omstandigheden volstaan om een fysisch verschijnsel te verklaren of tot een praktisch resultaat te komen. Eén van deze theorieën wordt de geometrische of stralenoptica genoemd. Deze reeds oude theorie vindt haar oorsprong in de vaststelling dat het licht zich rechtlijnig voortplant in een homogeen milieu, wat aan de basis ligt van het begrip lichtstraal. Dit is echter maar een benadering die evenwel goed opgaat zolang de oppervlakken en de andere discontinuïteiten die de golf ontmoet bij haar voortplanting, groot zijn t.o.v. haar golflengte. Deze theorie heeft vooral praktisch belang bij de constructie van optische instrumenten. De problemen in deze theorie zijn ofwel zeer eenvoudig ofwel mathematisch vrij ingewikkeld. De hoofdwetten waarop ze steunt worden besproken in de volgende secties.

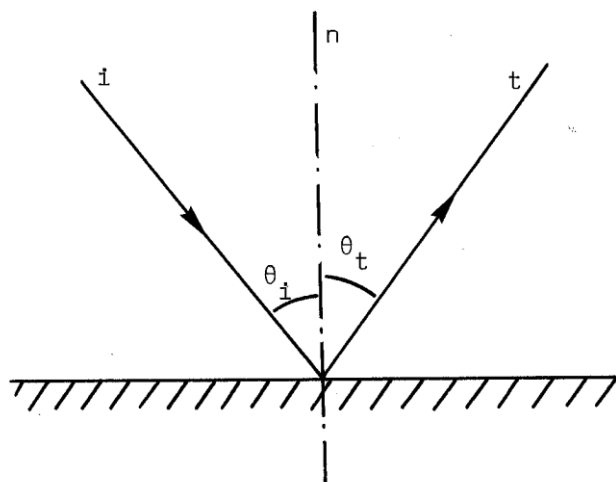


Een karakteristiek voorbeeld van het gebruik van stralen is de zogenaamde camera obscura. Bij een te grote opening is het beeld onscherp. Wanneer de afmetingen van de opening afnemen, wordt het beeld scherper, maar als de grootte vergelijkbaar wordt met de golflengte van het licht, wordt het beeld minder scherp.

V.2. DE TERUGKAATSING

We gaan onderstellen dat de afmetingen van de gebruikte apparaten veel groter zijn dan de golflengte van het gebruikte licht, zodat het golfkarakter van het licht niet naar voor treedt.

We laten een lichtbundel invallen op een vlak oppervlak (Fig. V.1).



Figuur V. 1

Deze straal zal zich na terugkaatsing op het oppervlak in een welbepaalde richting voortplanten. We noteren tevens dat licht zich rechtlijnig voortplant zolang het in hetzelfde medium blijft. Licht dat invalt op een vlak oppervlak voldoet aan volgende wetmatigheden:

- de invallende straal i , de teruggekaatste straal t en de normaal n op het oppervlak liggen in één vlak
- de invalshoek θ_i is gelijk aan de terugkaatsingshoek θ_t : $\theta_i = \theta_t$

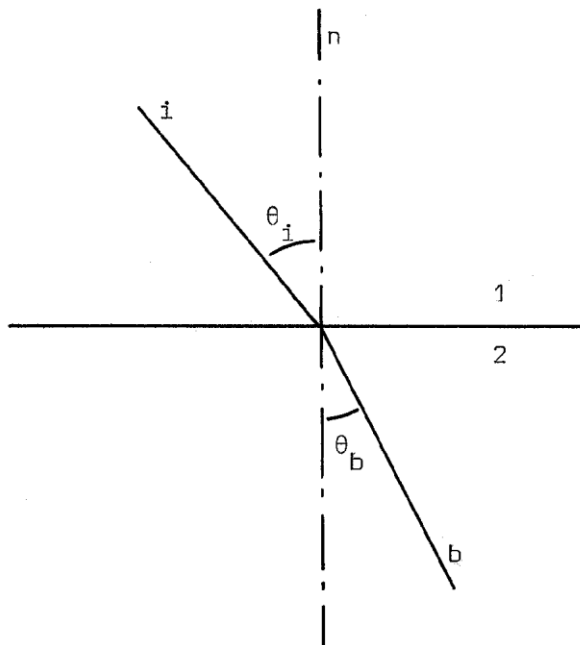
We merken ook op dat we een glad oppervlak lokaal als vlak mogen beschouwen.

V.3. DE LICHTBREKING

Als men een lichtbundel laat overgaan van een eerste medium naar een tweede, zal de lichtstraal afwijken van zijn oorspronkelijke richting (Fig. V.2). Dit noemt men lichtbreking.

We merken op dat :

- de invallende straal, de gebroken straal en de normaal in één vlak liggen.
- het verband tussen de invalshoek θ_i en de brekingshoek θ_b te vinden is in de wet van Snell (Nederlandse fysicus. Latijn: Snellius, Engelse literatuur: Snell) :



Figuur V. 2

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_b} = C^{\text{te}} = n_{21} \quad (5.1)$$

De constante die men voorstelt door n_{21} noemt men de brekingsindex van het tweede medium ten opzichte van het eerste medium. Deze brekingsindex blijkt afhankelijk te zijn van de kleur of golflengte van het gebruikte licht.

Men kan nu ook een absolute brekingsindex definiëren. Deze is dan de brekingsindex van het medium ten opzichte van vacuüm. De absolute brekingsindex van vacuüm zelf kunnen we dan gelijk aan 1 stellen. Men kan nu aantonen dat

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.2)$$

met n_1 en n_2 de absolute brekingsindices van de twee media ten opzichte van het vacuüm, zodat we de wet van Snel kunnen schrijven als :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_b \quad (5.3)$$

De waarde van de absolute brekingsindex is voor alle materialen over het algemeen groter dan 1. Als een stof een kleinere brekingsindex heeft dan een andere, dan zeggen we dat die stof “optisch ijler” is en de andere “optisch dichter”. Uit (5.3) volgt dat, als een lichtstraal van een optisch ijler naar een optisch dichter medium gaat, er breking is naar de normaal toe.

Tabel V.1 : Absolute brekingsindex voor verschillende materialen (bij $\lambda = 5890 \text{ \AA}$)

water	1,33
ethanol	1,36
lucht	1,0003
kroonglas	1,52
flintglas	1,66

V.4. TOTALE INWENDIGE TERUGKAATSING

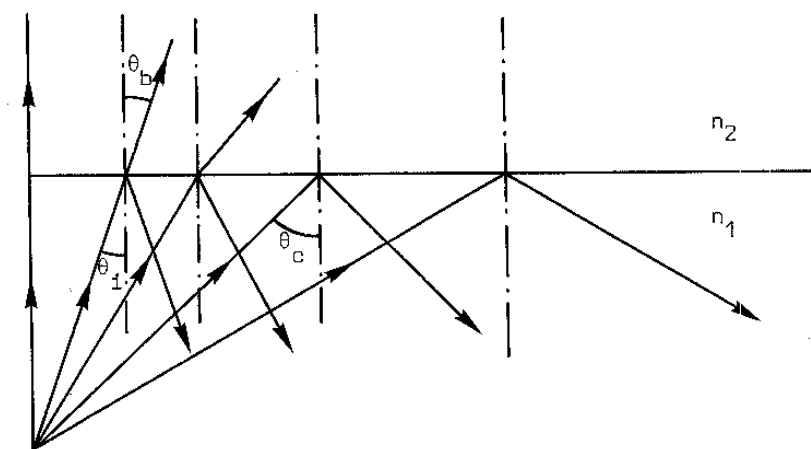
We laten een lichtbundel invallen van een optisch dichtere naar een optisch ijler milieu ($n_1 > n_2$). Als we nu de invalshoek θ_i laten toenemen, dan zal de brekingshoek θ_b , die steeds groter is dan θ_i , eveneens toenemen. Voor een bepaalde invalshoek zal $\theta_b = 90^\circ$. De invalshoek die met deze waarde van θ_b correspondeert, noemen we de grenshoek of de kritische hoek (critical angle, θ_c , zie Fig. V.3). Invalshoeken groter dan deze grenshoek θ_c geven aanleiding tot een effect dat men totale inwendige terugkaatsing noemt. Voor deze $\theta_i > \theta_c$ wordt al de inkomende energie volledig teruggekaatsd in het oorspronkelijke medium.

Men kan de grenshoek θ_c vinden door in de betrekking van Snel te stellen dat $\theta_b = 90^\circ$.

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ \quad (5.4)$$

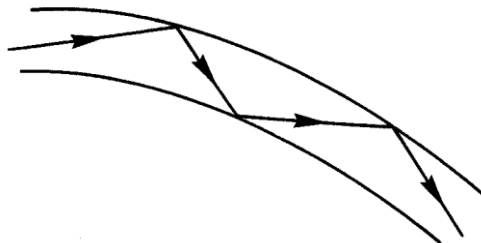
$$\sin \theta_c = n_2/n_1 \quad (5.5)$$

In het geval van een glazen plaat met $n = 1,5$ vinden we (voor breking naar lucht) $\theta_c = 41,8^\circ$.



Figuur V. 3

Toepassing : glasvezeloptiek (fiber optics).



Figuur V. 4

Het verschijnsel van totale inwendige terugkaatsing biedt de mogelijkheid om "licht over te brengen" van een plaats naar een andere, zonder veel energieverlies. Men laat licht invallen op het uiteinde van een dunne glasvezel. De lichtstraal zal verschillende totale terugkaatsingen op de wand ondergaan en zo de vorm van de vezel volgen (Fig. V.4).

Men kan aldus beelden overbrengen van de ene plaats naar de andere door gebruik te maken van een bundel vezels. Elke vezel zal een klein deel van het beeld overbrengen. Deze bundels zijn zeer buigzaam en worden gebruikt om bijvoorbeeld zeer moeilijk bereikbare plaatsen te belichten. De vezels worden gemaakt uit een glassoort met zeer hoge brekingsindex. Daarop brengt men een laagje glas aan met lage brekingsindex, waarmee de vezels aan elkaar gekit worden.

V.5. PRISMA'S

Een prisma is een veel voorkomend onderdeel van optische instrumenten. De werking ervan steunt op de wetten van lichtbreking en lichtterugkaatsing. We laten een lichtbundel invallen op een zijde van een prisma en we gaan de deviatiehoek δ berekenen. De deviatiehoek δ is de hoek gevormd door de intredende en de uitredende straal (Fig. V.5).

De lichtbundel ondergaat twee opeenvolgende brekingen. Aan beide oppervlakken kunnen we de wet van Snel toepassen.

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_b \quad (5.6)$$

$$n \sin \phi_i = \sin \phi_b \quad (5.7)$$

Uit figuur V.6 volgt :

$$\delta = \theta_i - \theta_b + \phi_b - \phi_i \quad (5.8)$$

en

$$\theta_b + \phi_i = \alpha \quad (5.9)$$

zodat

$$\delta = \theta_i + \phi_b - \alpha \quad (5.10)$$

Bij toepassingen maakt men vaak gebruik van een opstelling met minimumdeviatie. We gaan θ_i beschouwen als onafhankelijk veranderlijke en δ als afhankelijk veranderlijke. Na afleiden van betrekking (5.10) bekomen we

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\phi_b}{d\theta_i} \quad (5.11)$$

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\phi_b}{d\phi_i} \frac{d\phi_i}{d\theta_b} \frac{d\theta_b}{d\theta_i} \quad (5.12)$$

Uit (5.9) volgt

$$1 + \frac{d\phi_i}{d\theta_b} = 0 \quad (5.13)$$

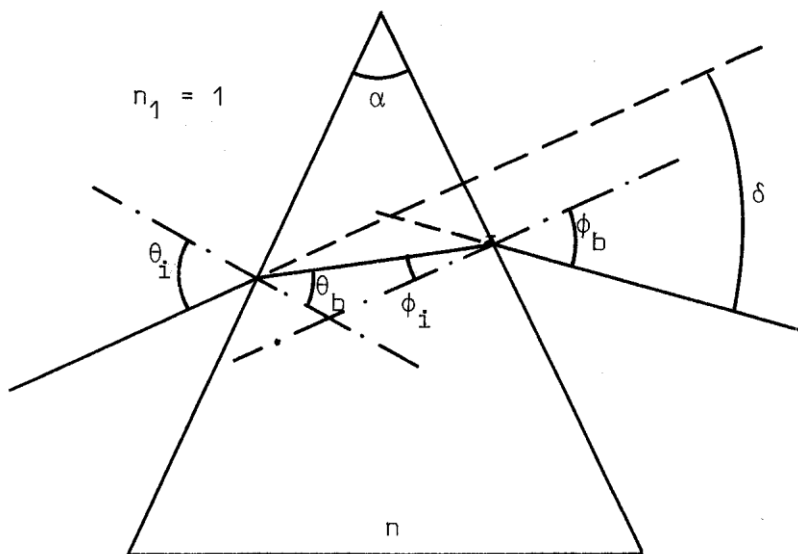
We bekomen

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 - \frac{d\phi_b}{d\phi_i} \frac{d\theta_b}{d\theta_i} \quad (5.14)$$

Uit (5.6) en (5.7) :

$$\theta_i(\theta_b) = \arcsin(n \sin \theta_b) \quad (5.15)$$

$$\phi_b(\phi_i) = \arcsin(n \sin \phi_i) \quad (5.16)$$



Figuur V. 5

Voor het verdere verloop van de berekening is het niet noodzakelijk de afgeleiden $d\theta_i/d\theta_b$ en $d\phi_b/d\phi_i$ expliciet te berekenen.

We stellen dat

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{d\theta_b} &= f(\theta_b) \\ \frac{d\phi_b}{d\phi_i} &= f(\phi_i)\end{aligned}\tag{5.17}$$

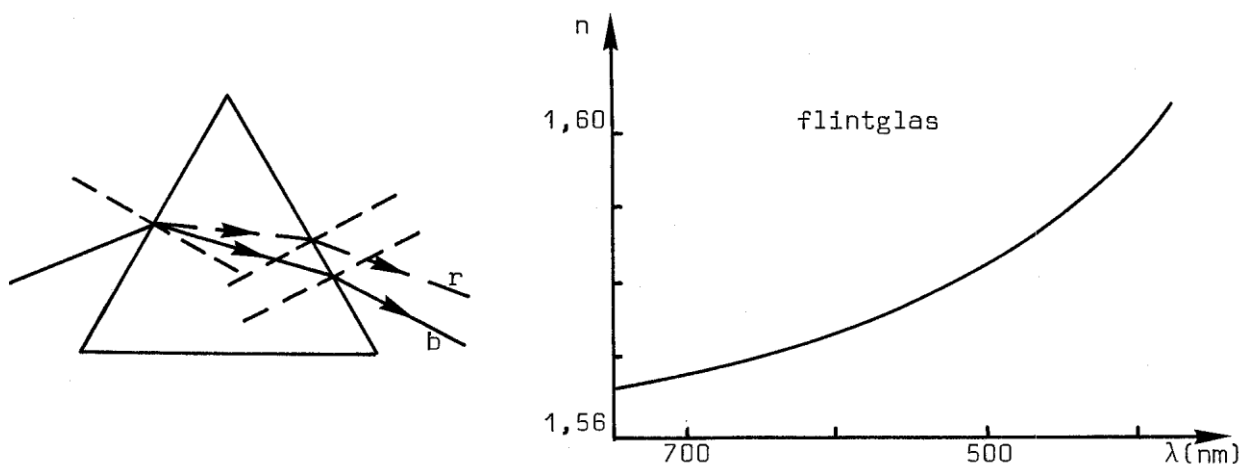
waarbij we opmerken dat de functies identiek zijn (en monotoon in het relevante hoekinterval).

Formule (5.14) wordt dan

$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = 1 - \frac{f(\phi_i)}{f(\theta_b)}\tag{5.18}$$

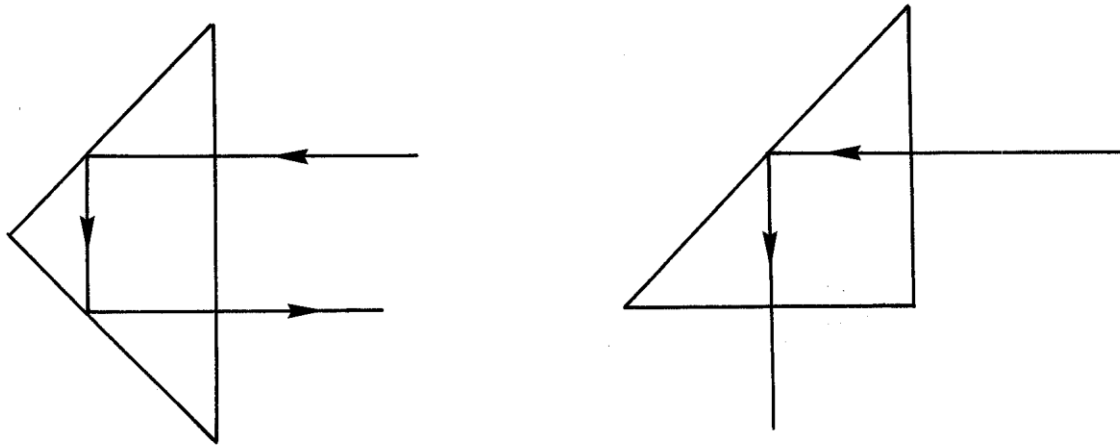
δ_{\min} vinden we door te stellen : $d\delta/d\theta_i = 0$, zodat bij de minimum deviatiehoek $f(\phi_i) = f(\theta_b)$ en $\phi_i = \theta_b$. Hieruit volgt ook $\theta_i = \phi_b$. Verder is dan $\theta_i = (\alpha + \delta_{\min})/2$ en $\theta_b = \alpha/2$. Uit (5.6) kan men dan n berekenen.

Laat men wit licht invallen op een prisma, dan blijkt er een kleurensplitsing op te treden (Fig. V.6). Wit licht bestaat uit golven met een continu kleurenspectrum, die afhankelijk van hun kleur in verschillende mate gebroken worden. Elke lichtkleur komt overeen met een bepaalde golflengte λ . Zichtbare licht bestrijkt een golflengtebereik tussen ± 400 nm en ± 800 nm (in lucht of vacuüm). De brekingsindex is functie van de golflengte. Dit verband noemt men de dispersierelatie (Fig. V.6).



Figuur V. 6

Prisma's worden ook gebruikt om lichtstralen in een andere richting af te buigen. Hierbij maakt men gebruik van totale inwendige terugkaatsing (Fig. V.7).

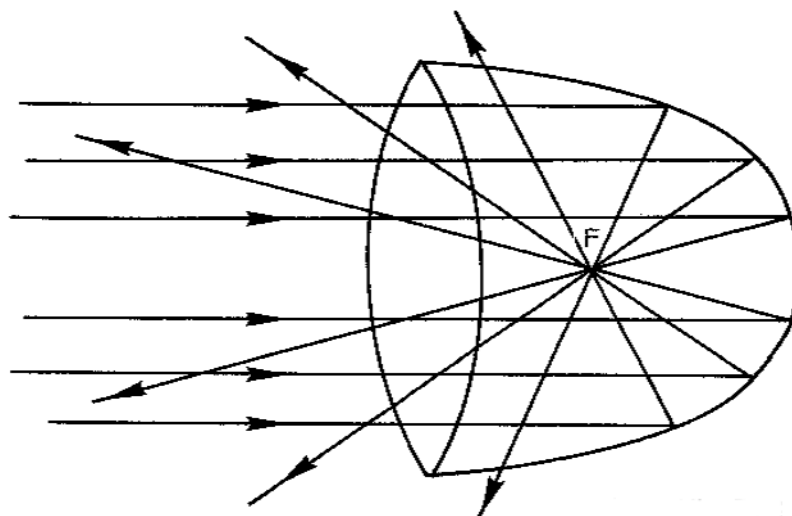


Figuur V. 7

V.6. SPIEGELS EN LENZEN

In vele optische instrumenten komt het er op aan een scherp niet-vertormd beeld te vormen van een voorwerp. Dit kan gebeuren door middel van spiegels en lenzen waarbij respectievelijk lichtterugkaatsing en lichtbreking optreden. Om aan de gestelde voorwaarden perfect te voldoen, dienen de spiegels en de lenzen een bijzondere geometrie te bezitten. Het bepalen van die vorm is een vrij ingewikkeld mathematisch probleem. Het construeren van dergelijke spiegels en lenzen is bovendien niet eenvoudig. In de praktijk is het veel eenvoudiger sferische oppervlakken te construeren. Daarom, op enkele uitzonderingen na, zijn alle optische instrumenten gebouwd met sferische spiegels en lenzen. Dit gaat ten koste van de gestelde voorwaarden (imperfecte beeldscherpte en beeldvervorming), maar men tracht hieraan zo goed mogelijk te verhelpen door gebruik te maken van systemen met meerdere lenzen van verschillende glastypes. De goede werking van deze systemen is dan ook alleen maar verzekerd voor stralenbundels die voldoende nauw om de as van het stelsel gelegen zijn. Dergelijke bundels noemt men paraxiale bundels.

V.7. BEELDVORMING BIJ SFERISCHE SPIEGELS



Figuur V. 8

Als een parallelle lichtbundel evenwijdig invalt met de as van een concave (holle) spiegel, die de vorm heeft van een paraboloid, zal hij gefocust worden in een punt F , het brandpunt van de paraboloid (Fig. V.8). Omgekeerd, alle lichtstralen die door F gaan, worden omgezet in een parallelle bundel. Een concave sferische spiegel zal zich op dezelfde manier gedragen als we enkel met paraxiale stralen werken.

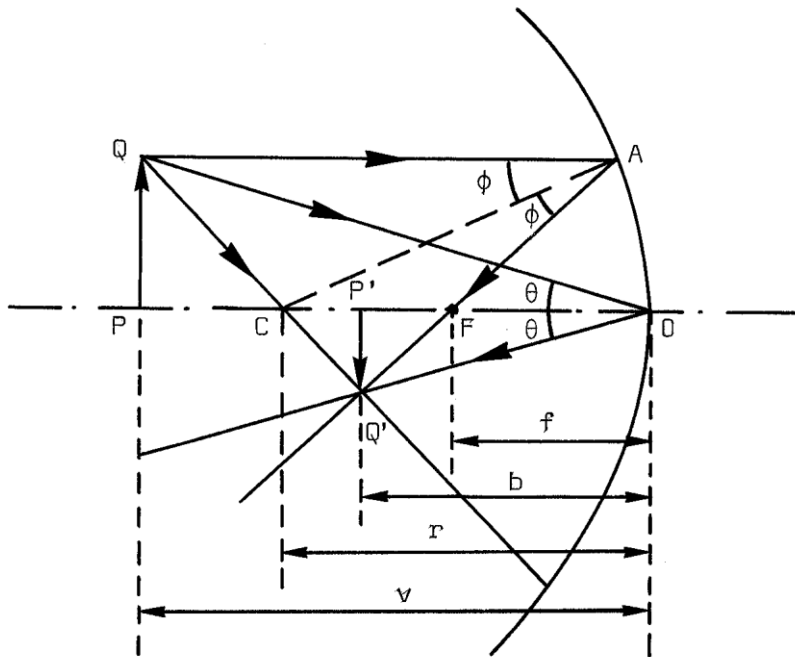
We zullen nu de zogenaamde formule van Descartes (5.21) op 2 manieren afleiden. De eerste procedure is essentieel analoog aan deze gevolgd in sectie V.8 en we verwijzen hiervoor naar de cursusslides. De interpretatie van deze formule is heel belangrijk en als volgt : in de gevolgde paraxiale benadering gaan alle stralen die door een bepaald punt P van een voorwerp gaan, onafhankelijk van de hoek met de optische as, na reflectie door hetzelfde punt P' (beeldpunt). Dit rechtvaardigt het gebruik van enkele (eenvoudige) stralen bij de constructie van het beeld, zoals hieronder zal gebeuren.

Het gevormde beeld door een sferische spiegel kan dus gevonden worden door de constructie van enkele bijzondere stralen zoals deze door de pool O en deze door het centrum C (Fig. V.9).

De straal QO die invalt onder een hoek θ , wordt teruggekaatst onder dezelfde hoek. Indien het voorwerp PQ oneindig ver zou liggen, zouden alle stralen evenwijdig zijn aan de as en zouden ze na terugkaatsing door het punt F gaan. Dit laat ons toe een 3^{de} eenvoudige lichtstraal te beschouwen, namelijk QA .

Men noemt F het brandpunt van de spiegel en de afstand OF noemt men de brandpuntsafstand. Uit Fig. V.9 volgt dat de hoeken CAF en ACF gelijk zijn, zodat de

driehoek CFA gelijkbenig is en $CF = FA$.



Figuur V. 9 ($f > 0$, $v > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $m < 0$)

Voor kleine hoeken geldt $FA \cong FO$ zodat $FO = f = r/2$. Hierin is r de kromtestraal van het sferische oppervlak.

Noemt men PO de voorwerpsafstand v en $P'O$ de beeldafstand b dan bekommen we, gelet op de gelijkvormigheid van de driehoeken PQO en $P'Q'O$:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PO}{P'O} = \frac{v}{b} \quad (5.19)$$

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken PQC en $P'Q'C$ halen we

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PC}{P'C} = \frac{v-r}{r-b} \quad (5.20)$$

of de formule van Descartes :

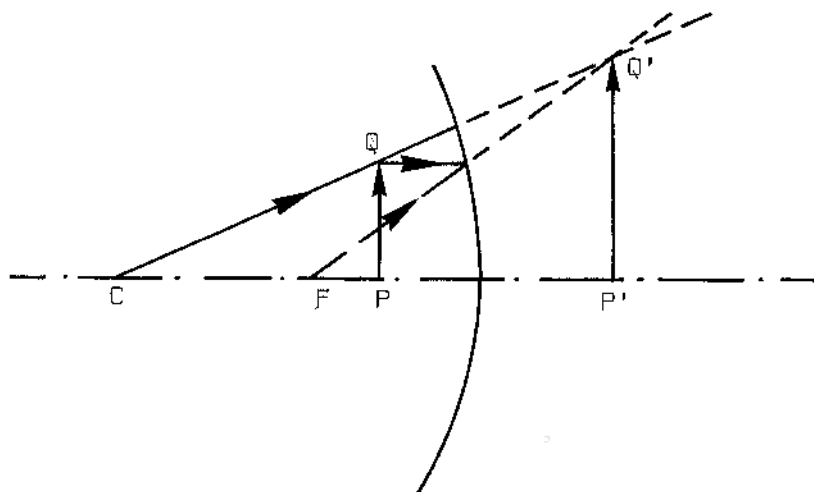
$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (5.21)$$

Bovenstaande betrekking geldt ook in het geval dat $v < f$. De berekende waarde van de beeldafstand zal dan negatief zijn. Dit dient geïnterpreteerd te worden als een beeld dat achter de spiegel ligt. We spreken dan van een virtueel beeld. Achter de spiegel is er geen licht aanwezig doch de waarnemer heeft de indruk dat er op die plaats een beeld is (Fig. V.10).

In het geval $v < f$ zullen we een beeld krijgen dat rechtop staat zoals het voorwerp. In het geval $v > f$ is het beeld omgekeerd ten opzichte van het voorwerp. De vergroting definiëren

we dan als

$$m = -b/v \quad (5.22)$$



Figuur V. 10 ($f > 0, v > 0, b < 0, r > 0, m > 0$)

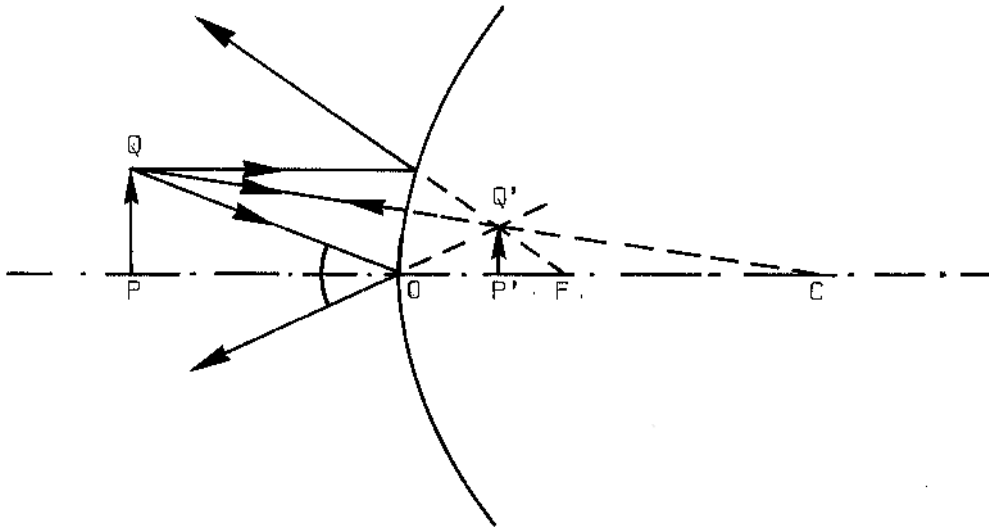
Als $m > 0$ is het beeld rechtopstaand, als $m < 0$ is het beeld omgekeerd. De betrekking (5.21) kunnen we ook gebruiken in het geval van een convexe (bolle) sferische spiegel (Fig. V.11). We hebben dan een divergerend systeem en we moeten er rekening mee houden dat f negatief te nemen is.

We kunnen dan de volgende tekenconventies invoeren :

- 1) als de lichtstraal van links naar rechts loopt, zoals in de figuren, dan zullen de voorwerpsafstanden positief genomen worden wanneer ze links van het spiegelende scheidingsoppervlak liggen en negatief wanneer ze rechts liggen. De beeldafstanden zullen positief genomen worden als ze links (dus aan dezelfde kant van het voorwerp, waar het licht effectief komt) liggen en negatief als ze rechts liggen van het scheidingsoppervlak (waar het licht niet komt).
- 2) de brandpuntsafstanden en kromtestralen worden eveneens positief gerekend wanneer respectievelijk het brandpunt en het middelpunt aan de kant liggen vanwaar het licht komt (reële of R-kant, links in ons geval). De brandpuntsafstanden en kromtestralen worden negatief gerekend wanneer deze punten achter de spiegel liggen (virtuele of V-kant, rechts in ons geval).
- 3) voorwerp- en beeldgrootte zijn positief wanneer ze rechtop staan en negatief wanneer ze omgekeerd staan.

Met deze conventies hebben we in het geval van Fig. V.9 dat f en r positief moeten genomen

worden, immers $f = r/2$. In Fig. V.10 zijn f en r ook positief terwijl in Fig. V.11 beide grootheden negatief zijn.



Figuur V. 11 ($f < 0$, $v > 0$, $b < 0$, $r < 0$, $m > 0$)

V.8. BEELDVORMING AAN EEN SFERISCH

SCHEIDINGSOPPERVLAK VAN DOORLATENDE MILIEUS

Een systeem bestaande uit één enkel sferisch scheidingsoppervlak aan twee lichtdoorlatende milieus is een zeer weinig voorkomend geval, maar fungeert als inleiding op de (dunne) lenzen ; het is voor wat de theorie betreft op analoge wijze te behandelen als de sferische spiegels.

In Fig. V.12 staat een puntbron P voor een sferisch oppervlak met kromtestraal r . Het sferisch oppervlak doet dienst als scheiding tussen twee verschillende media gekenmerkt door de brekingsindices n_1 en n_2 . We onderstellen $n_1 < n_2$. Het snijpunt P' van de optische as en de gebroken straal vormt het beeld P' van de puntbron P .

Aan het scheidingsoppervlak kunnen we de wet van Snel toepassen :

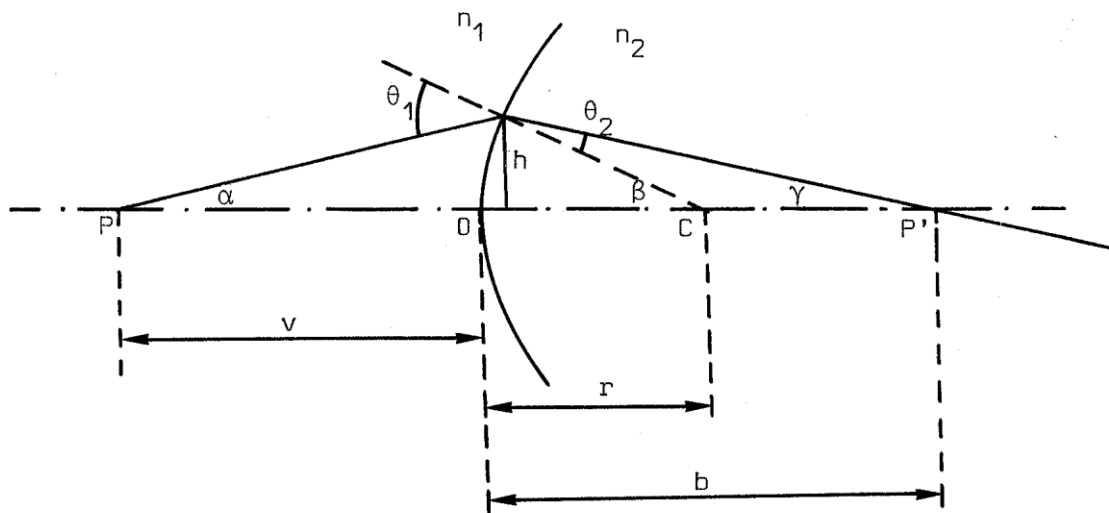
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (5.23)$$

Uit Fig. V.12 volgt :

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (5.24)$$

$$\theta_2 = \beta - \gamma \quad (5.25)$$

of



Figuur V. 12

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \cong \frac{n_2}{n_1} \quad (5.26)$$

waaruit volgt :

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = \beta (n_2 - n_1) \quad (5.27)$$

Rekening houdend met

$$\text{tg } \alpha \cong h/v \cong \alpha \quad (5.28)$$

$$\text{tg } \beta \cong h/r \cong \beta \quad (5.29)$$

$$\text{tg } \gamma \cong h/b \cong \gamma \quad (5.30)$$

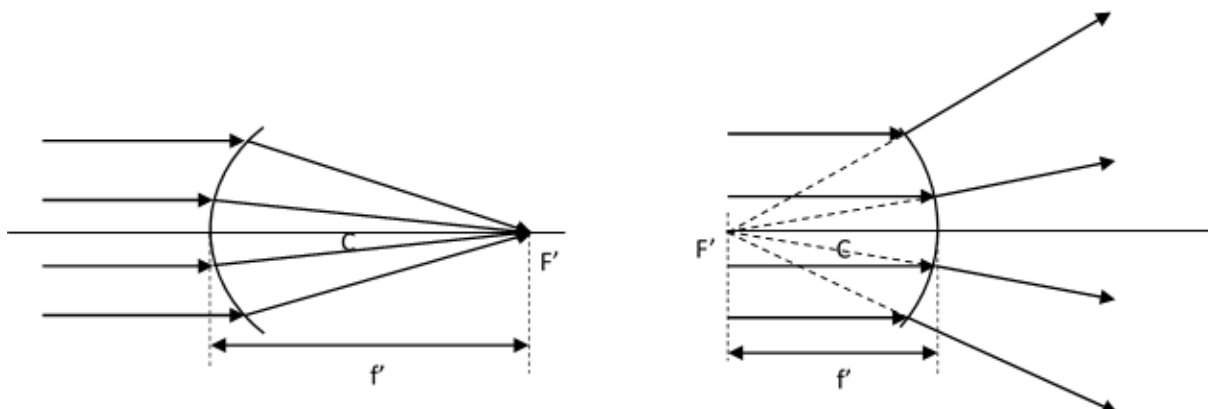
bekomen we de formule van Descartes voor breking

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.31)$$

We kunnen bij sferische oppervlakken dezelfde tekenconventie aannemen als bij sferische spiegels behalve dat de beeldafstand b en de kromtestraal r (niet de brandpuntsafstanden f en f' die hetzelfde teken hebben, zie formules (5.32) en (5.33)) positief zullen zijn als ze rechts van het scheidingsoppervlak liggen. De kant van de reële beelden (R-kant) is hier dus rechts, waar het licht effectief komt. In het geval van Fig. V.12 en betrekking (5.31) zullen v , b en r dan positieve numerieke waarden hebben.

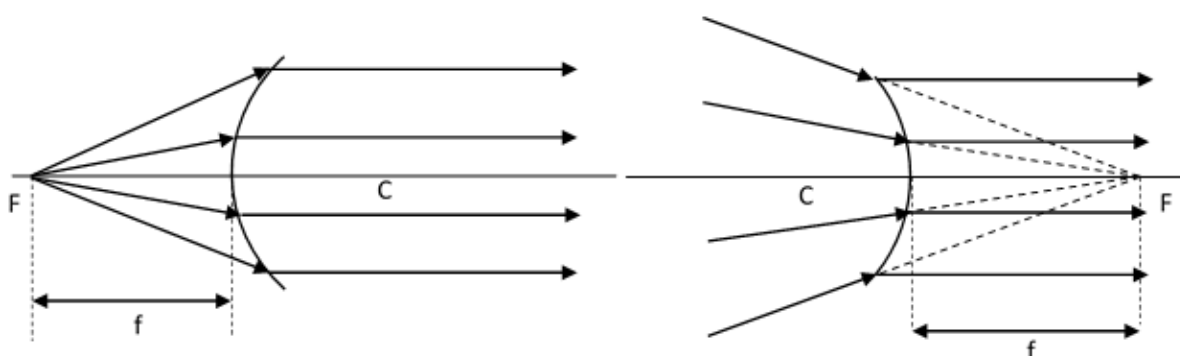
Bij de behandeling van sferische scheidingsoppervlakken en bij lenzen (zie verder) kan men twee brandpunten definiëren. Om het secundaire brandpunt te definiëren, laten we een parallelle bundel invallen. Bij een convergerend systeem wordt de bundel gefocuseerd in het secundaire brandpunt F' (Fig. V.13, links). Bij een divergerend systeem krijgen we een

divergerende bundel die lijkt te vertrekken vanuit het secundair brandpunt F' (Fig. V.13, rechts). Hiermee correspondeert dan de secundaire brandpuntsafstand f' .



Figuur V. 13

De primaire brandpunten liggen aan de tegenovergestelde kant in vergelijking met de secundaire (laat de stralen van de tegenovergestelde kant invallen in vergelijking met de secundaire brandpunten). Wanneer een puntbron wordt geplaatst in het primaire brandpunt, ontstaat er een evenwijdige bundel. Bij een convergerend systeem (Fig. V.14, links) is dit eenvoudig in te zien. Bij een divergerend systeem (Fig. V.14, rechts) is de puntbron in dat geval een virtueel voorwerp, m.a.w. een bundel die zou focuseren in het primaire brandpunt indien het scheidingsoppervlak er niet zou zijn, wordt in een parallelle bundel omgezet. Het vlak loodrecht op de as en door het brandpunt noemt men het brandvlak. Er zijn dus ook twee brandvlakken, respectievelijk het primaire en het secundaire brandvlak genoemd. Beide brandpuntsafstanden zijn positief voor een convergerend systeem en negatief voor een divergerend systeem.



Figuur V. 14

We passen dit alles toe op (5.31). Indien we v zeer groot laten worden zal b naar f' naderen. Er volgt daaruit :

$$\frac{n_2}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.32)$$

Op dezelfde manier laten we b zeer groot worden, zodat v naar f nadert. We bekommen dan :

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (5.33)$$

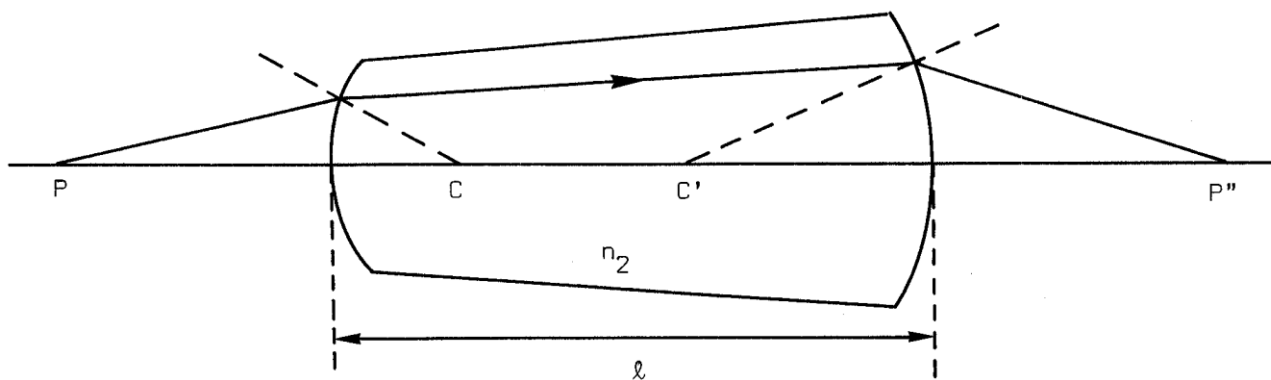
Uit bovenstaande formules kunnen we f en f' berekenen en bovenstaande beweringen over de tekens nagaan. Tenslotte hebben we :

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'} \quad (5.34)$$

V.9. BEELDVORMING BIJ LENZEN

Van zeer groot belang in de praktijk zijn systemen bestaande uit twee sferische oppervlakken. Dergelijke systemen noemt men lenzen. Fig. V.15 geeft een voorbeeld van een lens (vergelijk met Fig. V.12 waar de stralen sterker gebroken werden, bijv. door een grotere brekingsindex). We bestuderen nu wat er aan beide scheidingsvlakken gebeurt. Voor het eerste oppervlak (Fig. V.16) kunnen we de betrekking (5.31) neerschrijven

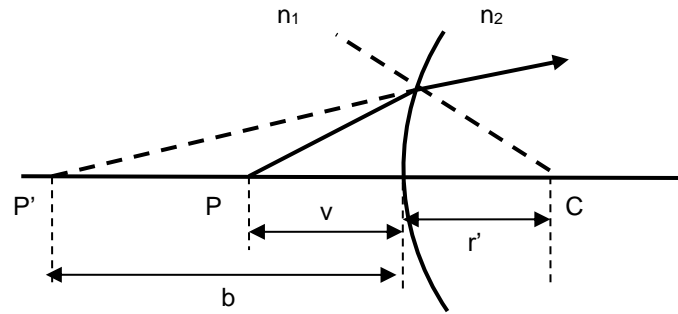
$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r'} \quad (5.35)$$



Figuur V. 15

We kunnen nu het beeld P' beschouwen als het voorwerp voor het tweede oppervlak (Fig. V.17, de 2 deelfiguren Fig. V.16 en 17 komen slechts kwalitatief overeen met Fig. V.15). We kunnen verder aan het scheidingsoppervlak een analoge betrekking neerschrijven als (5.31) :

$$\frac{n_2}{v'} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.36)$$

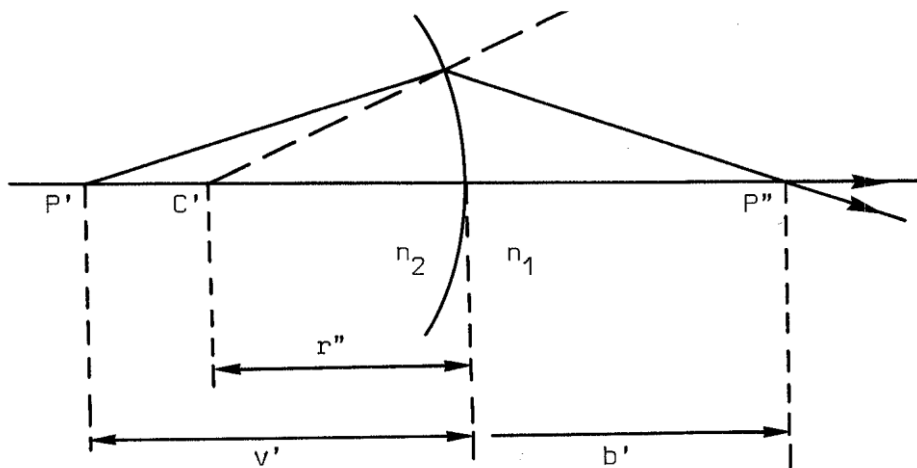


Figuur V. 16

Uit de Figuren V.15, V.16 en V.17 volgt

$$\ell = b + v' \quad (5.37)$$

We brengen dit in (5.36)



Figuur V. 17

$$\frac{n_2}{\ell - b} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.38)$$

We onderstellen dat we met dunne lenzen werken zodat $\ell \cong 0$ en

$$-\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{b'} = \frac{n_1 - n_2}{r''} \quad (5.39)$$

Samentellen van (5.35) en (5.39) geeft

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_1}{b'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \quad (5.40)$$

Als we de uiteindelijke beeldafstand b noemen, dan bekommen we

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_1}{b} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \quad (5.41)$$

We dienen wel op te merken dat deze vergelijking enkel geldig is voor paraxiale bundels en voor dunne lenzen, zodat het geen verschil uitmaakt vanaf welke oppervlakken v en b gemeten worden.

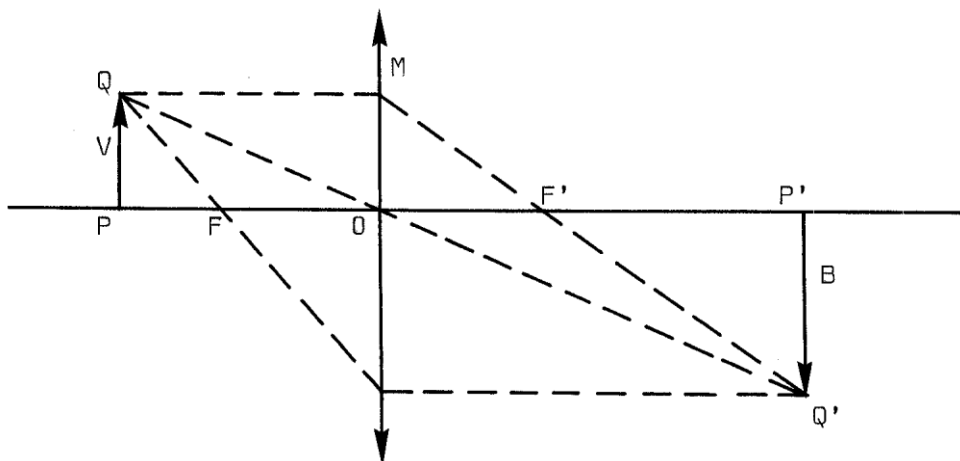
V.10. AFLEIDEN VAN DE LENZENFORMULE

Uit Fig. V.18 volgt door het beschouwen van de gelijkvormige driehoeken PQO en P'Q'O dat

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{v}{b} \quad (5.42)$$

We vinden ook uit de gelijkvormigheid van de driehoeken MOF' en Q'P'F' dat

$$\frac{OM}{P'Q'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{f}{b-f} \quad (5.43)$$



Figuur V. 18 ($v > 0$, $b > 0$, $f > 0$, $m < 0$)

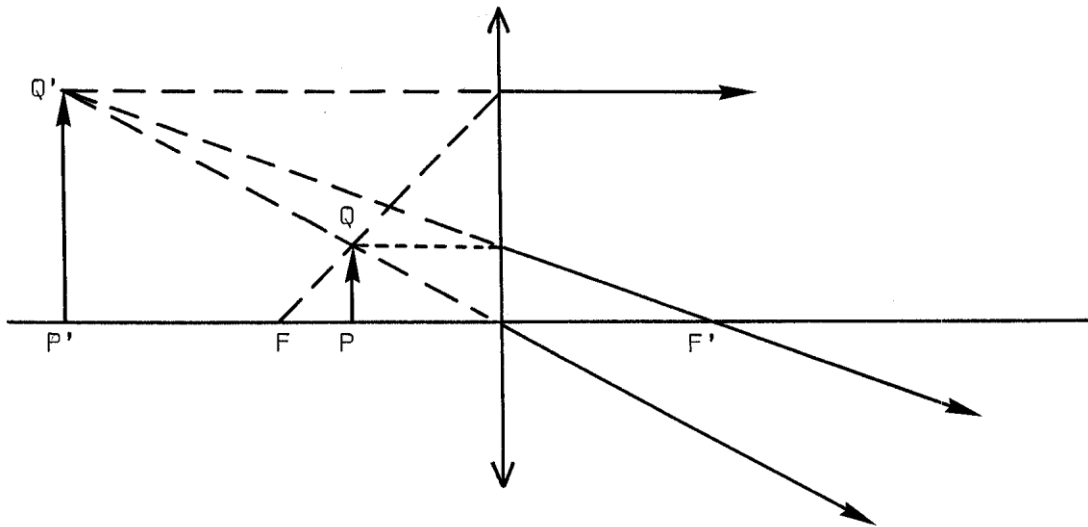
Uit deze beide betrekkingen volgt :

$$\frac{v}{b} = \frac{f}{b-f} \quad \text{of} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \quad (5.44)$$

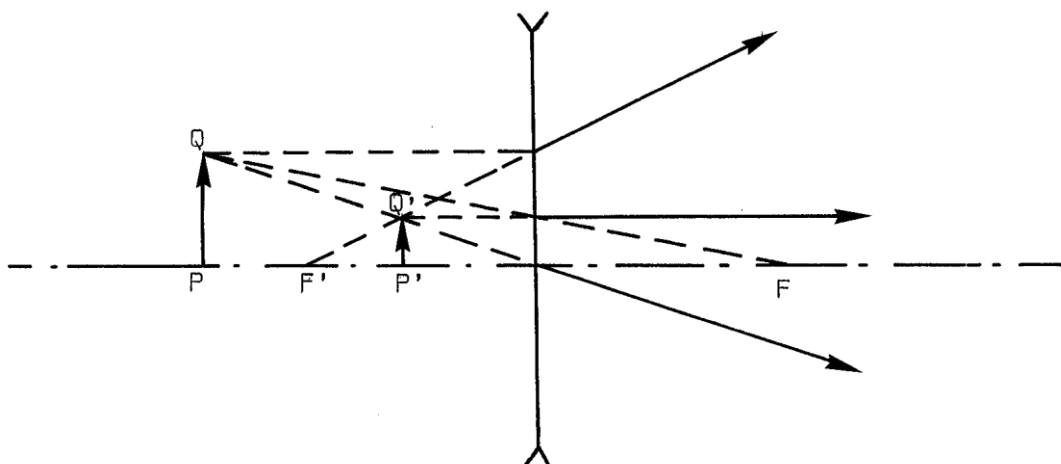
De betrekking (5.44) is algemeen geldig voor lenzen indien het teken van f genomen wordt volgens de overeengekomen tekenconventie.

- In het geval $v < f$ en voor een convergerende lens, bekomen we een virtueel en rechtopstaand beeld (Fig. V.19). Het beeld ligt aan dezelfde kant als het voorwerp zodat wegens de tekenconventie b negatief zal zijn. De vergroting wordt gegeven door de verhouding $m = -b/v$ zodat in dit geval m positief zal zijn en we dus een rechtopstaand beeld moeten bekomen.

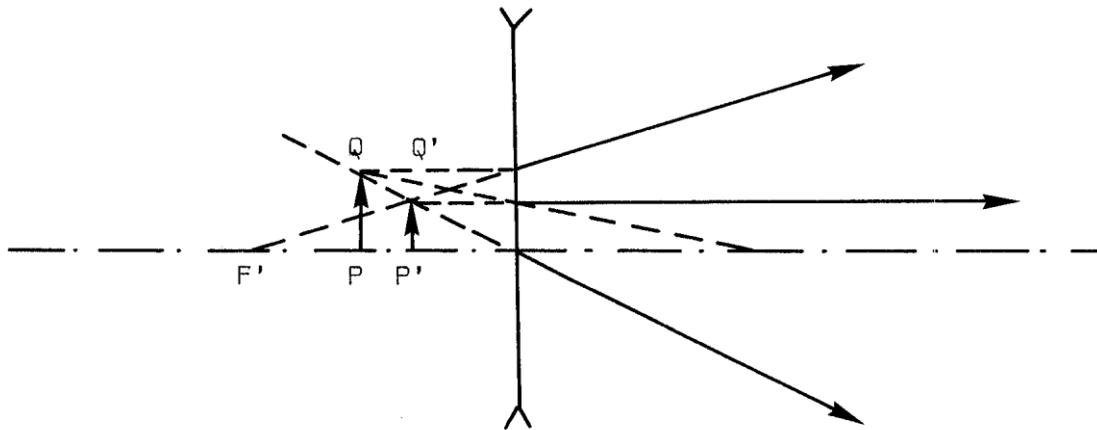
- In het geval $v > f$ voor een convergerend systeem, bekomen we een reëel en omgekeerd beeld (Fig. V.18). Nu is b positief zodat m negatief wordt.
- In het geval dat $v = f$ en voor een convergerend systeem zal het beeld op oneindig liggen.
- In het geval van een divergerend systeem moet f negatief gerekend worden. Voor $v > |f|$ bekomen we dan een rechtopstaand, virtueel, verkleind beeld (Fig.V.20). In het geval dat $v < |f|$ bekomen we ook een virtueel, rechtopstaand en verkleind beeld (Fig. V.21).



Figuur V. 20 ($v > 0, b < 0, f > 0, m > 0$)



Figuur V. 19 ($v > 0, b < 0, f < 0, m > 0$)



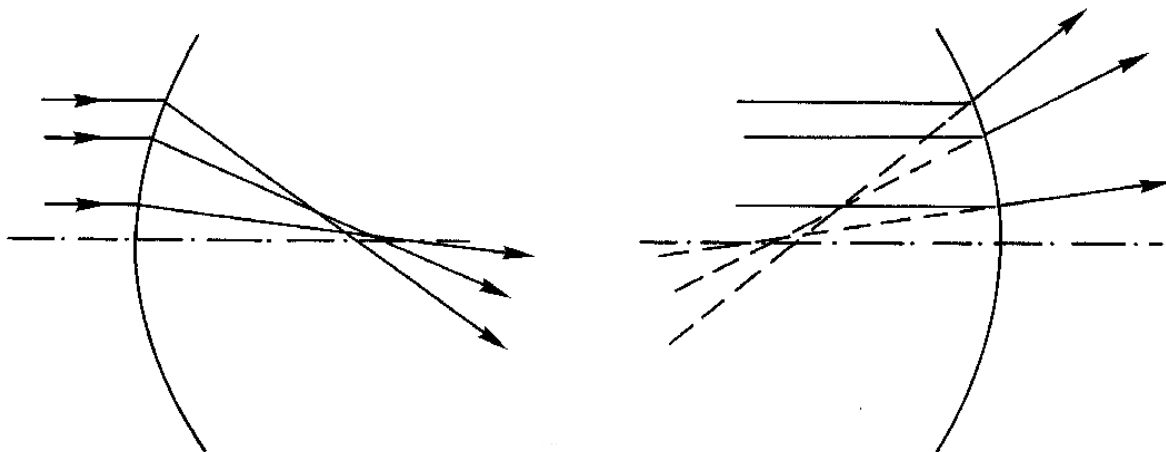
Figuur V. 21 ($v > 0$, $b < 0$, $f < 0$, $m > 0$)

V.11. FOUTEN BIJ DE BEELDVORMING DOOR LENZEN

Bij lenzen onderscheidt men verscheidene fouten, waarvan we enkel de voornaamste bespreken.

1) Sferische aberratie :

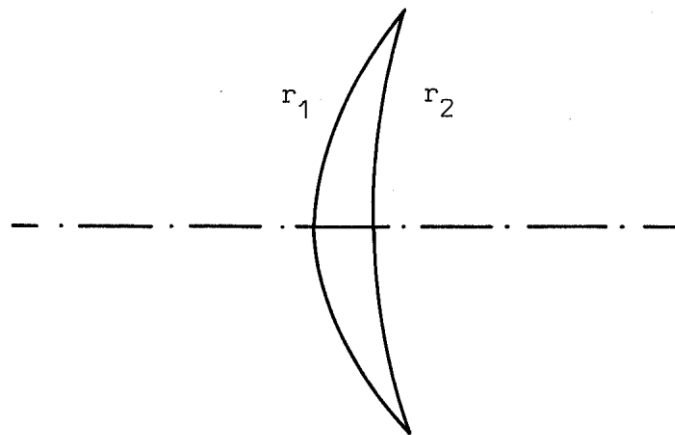
Daar een lichtbundel niet oneindig nauw kan genomen worden, heeft dit voor gevolg dat lichtstralen parallel met de as, maar een bepaalde afstand van de as verwijderd, deze as na breking zullen snijden in punten verschillend van het brandpunt (Fig. V.22). Het beeld in het brandvlak is niet langer een punt, maar een vlekje.



Figuur V. 22

Deze afwijking die een gevolg is van het gebruik van sferische oppervlakken noemt men sferische aberratie. Uit Fig. V.22 volgt dat een convergerend sferisch vlak de buitenste lichtstralen meer convergeert dan de paraxiale en dat een divergerend sferisch oppervlak ook de buitenste stralen meer divergeert. Het ligt dus voor de hand dat bij een combinatie van

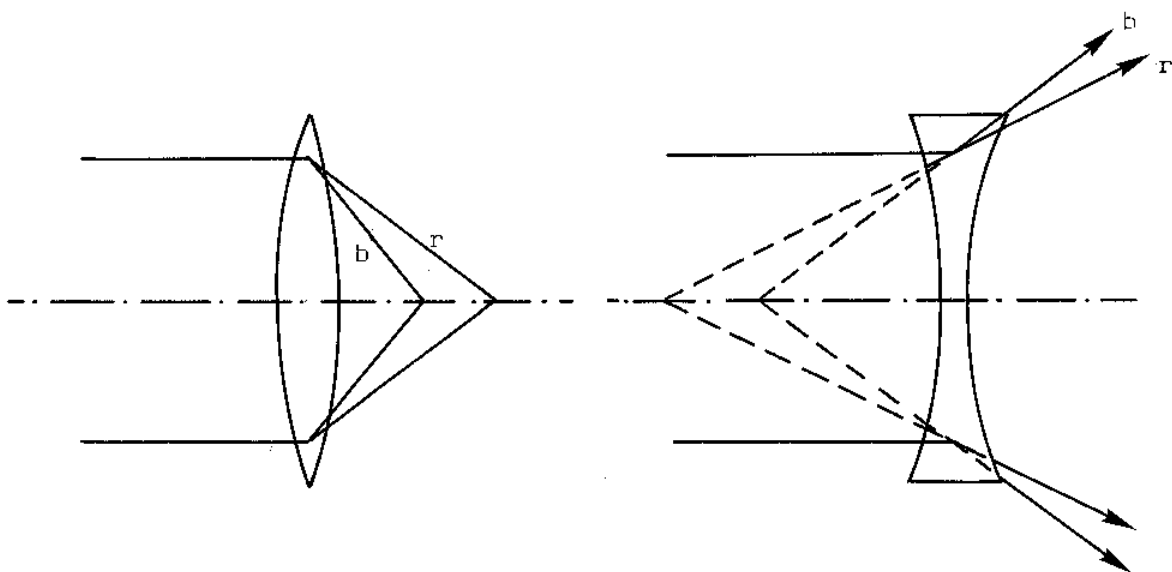
beide systemen het effect zal verminderen. Zo kan men aantonen dat bij een lens met $r_1 = r_2/7$ de sferische aberratie minimaal is (Fig. V.23).



Figuur V. 23

2) Chromatische aberratie :

Chromatische aberratie is een gevolg van het feit dat de brekingsindex afhankelijk is van de golflengte. Een bundel wit licht parallel aan de as wordt geconcentreerd op de as in een spectrum (Fig. V.24). Daar het effect tegengesteld is voor convergerende en divergerende lenzen en bovendien afhankelijk is van de gebruikte glassoort is het mogelijk lenzenstelsels te bouwen bestaande uit lenzen van verschillende glassoorten zodanig dat de chromatische aberratie opgeheven wordt terwijl er nog altijd globaal lenswerking optreedt.



Figuur V. 24

3) Astigmatisme :

Deze aberratie is een gevolg van het feit dat een voorwerp of een puntbron zich niet op de as bevindt. Een punt dat niet op de as ligt, wordt niet afgebeeld als een punt. Daar de lens asymmetrisch getroffen wordt, geven parallel invallende stralen in verticale en horizontale vlakken immers geen aanleiding tot één brandpunt maar tot twee loodrecht op elkaar staande brandlijnen op verschillende afstand van de lens gelegen. Deze fout is te minimaliseren door gebruik te maken van een geschikte lenzencombinatie of door de schuine stralen uit te schakelen met behulp van een diafragma.

V.12. BEELDVORMING BIJ EEN STELSEL VAN LENZEN

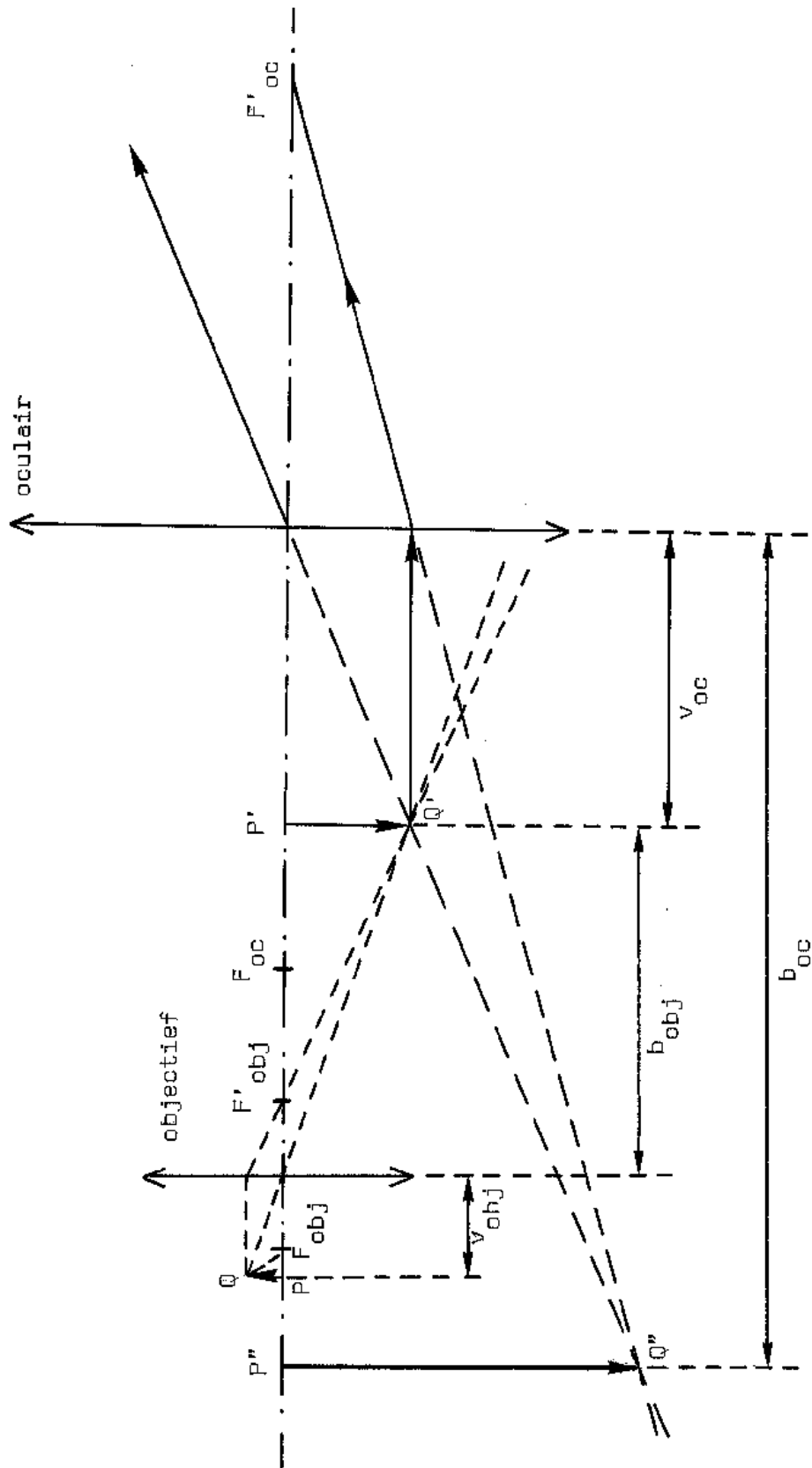
Men bepaalt het beeld gevormd door een stelsel van lenzen, in principe door elke lens afzonderlijk te beschouwen en telkens het beeld verkregen met de voorgaande lens als voorwerp voor de volgende lens te nemen.

Voorbeeld : de microscoop

De eenvoudigste microscoop bestaat uit twee convergerende lenzen : het oculair en het objectief. Het objectief is een lens met zeer kleine brandpuntsafstand. Men plaatst het voorwerp juist voorbij F_{obj} (Fig. V.25).

Er wordt een reëel vergroot beeld $P'Q'$ gevormd van het voorwerp PQ , dat dienst doet als voorwerp voor het oculair. Het gevormde eindbeeld $P''Q''$ is virtueel en omgekeerd. Het oculair doet in feite dienst als loep (zie verder). Deze microscoop vertoont tal van afwijkingen.

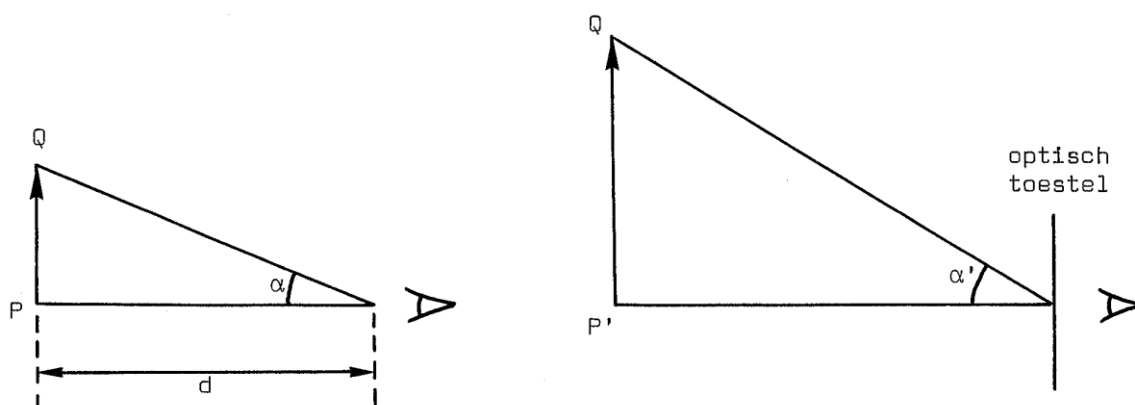
In de moderne microscopen bestaan zowel het objectief als het oculair uit een stelsel van lenzen. Daar de constructie van de stralengang voor een stelsel van lenzen in de praktijk zeer onnauwkeurig is, geeft men er de voorkeur aan de stralengangen te berekenen. Dit kan aanleiding geven tot vrij complexe berekeningen, die echter met de huidige rekenmiddelen tot zeer behoorlijke resultaten leiden.



Figuur V. 25

V.13. VERGROTING

Over het algemeen is het gevormde beeld niet even groot als het voorwerp. De verhouding van de grootte van het beeld tot de grootte van het voorwerp (volgens de lineaire afmetingen) noemt men de **dwarse** vergroting $m = B/V = -b/v$. De dwarse vergroting speelt een belangrijke rol in de fotografie en in de projectie. Bij andere toestellen is ze echter minder interessant. Een vergroot beeld gelegen op zeer grote afstand kan nog altijd een klein beeld geven op het netvlies.



Figuur V. 26

Daarom voert men de notie **hoek**vergroting in. De hoekvergroting β wordt gedefinieerd als de verhouding van de hoek waaronder het (beeld van het) voorwerp met het optisch toestel gezien wordt, tot de maximale hoek, corresponderend met de dichtste afstand, waaronder het voorwerp met het blote oog nog scherp gezien wordt. Deze afstand d bedraagt voor een normale persoon ongeveer 25 cm (Fig. V.26).

Uit Fig. V.26 volgt de hoekvergroting $\beta = \alpha'/\alpha$.

Vermits $\alpha \cong PQ/d = V/d$ bekommen we $\beta = \alpha'd/V$.

Soms kan dus $P'Q'$ groter zijn dan PQ waarbij echter β kleiner is dan 1, wat geen voordeel oplevert. Merken we hier op dat we paraxiale bundels beschouwen, zodat α en α' klein zijn.

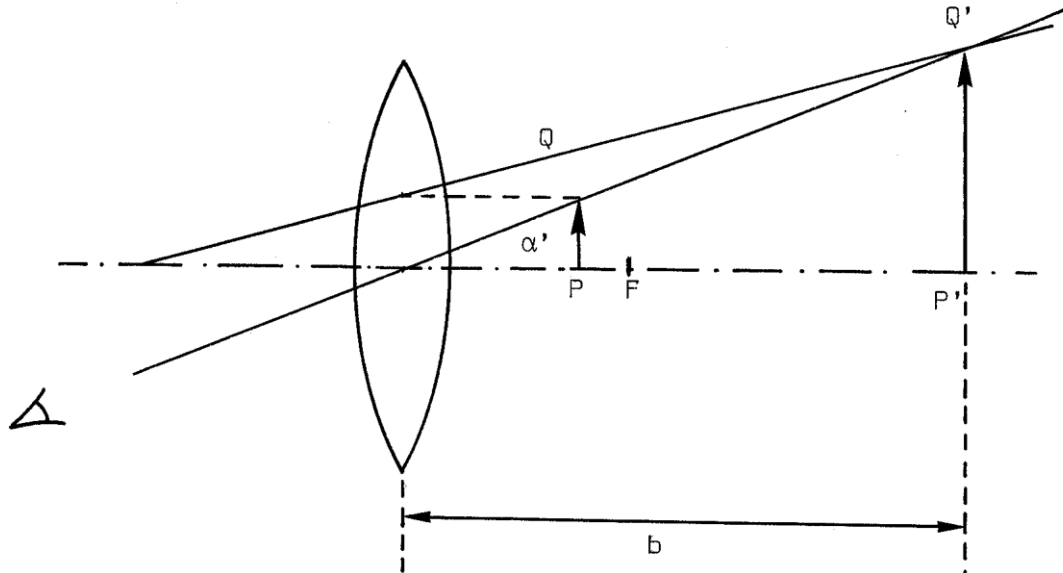
Voorbeeld

1) De loep

Een loep bestaat uit een convergerende lens, met kleine brandpuntsafstand (enkele cm), die bij een gepaste stand ten opzichte van het voorwerp hiervan een virtueel vergroot, rechtopstaand beeld vormt. Het voorwerp wordt daartoe tussen de lens en haar brandvlak geplaatst (Fig. V.27). Vermits de hoeken klein zijn, mogen we ze vervangen door hun

tangenswaarden zodat ($b < 0$) :

$$\beta = \frac{\text{tg}\alpha'}{\text{tg}\alpha} = \frac{-\frac{B}{b}}{\frac{V}{d}} = \frac{d}{v} = \frac{25\text{cm}}{v} \quad (5.45)$$



Figuur V. 27

2) De microscoop (zie ook hoger)

De vergroting van een microscoop wordt gedefinieerd als het product van de dwarse vergroting van het objectief en de hoekvergroting van het oculair. De vergroting wordt dus gegeven door

$$M = -\frac{b_{\text{obj}}}{v_{\text{obj}}} \times \frac{25\text{cm}}{v_{\text{oc}}} \quad (5.46)$$

Uit

$$\frac{1}{v_{\text{obj}}} + \frac{1}{b_{\text{obj}}} = \frac{1}{f_{\text{obj}}} \quad (5.47)$$

volgt

$$M = -\frac{b_{\text{obj}} - f_{\text{obj}}}{f_{\text{obj}}} \times \frac{25\text{cm}}{v_{\text{oc}}} \quad (5.48)$$

Indien het voorwerp bijna in het brandvlak van het objectief geplaatst wordt ($v_{\text{obj}} \cong f_{\text{obj}}$), dan zal het beeld op grote afstand worden gevormd. Verder is de opstelling zo dat dit beeld ongeveer samenvalt met het brandpunt van het oculair zodat $v_{\text{oc}} \cong f_{\text{oc}}$. Voor de vergroting komt er dan :

$$M = - \frac{|F'_{\text{obj}} F_{\text{oc}}| 25\text{cm}}{f_{\text{obj}} f_{\text{oc}}} \quad (5.49)$$

De afstand $|F'_{\text{obj}} F_{\text{oc}}|$ wordt de tubuslengte L van de microscoop genoemd. In absolute waarde wordt de vergroting dan :

$$M = \frac{L \times 25\text{cm}}{f_{\text{obj}} f_{\text{oc}}} \quad (5.50)$$

V.14. TELESCOOP

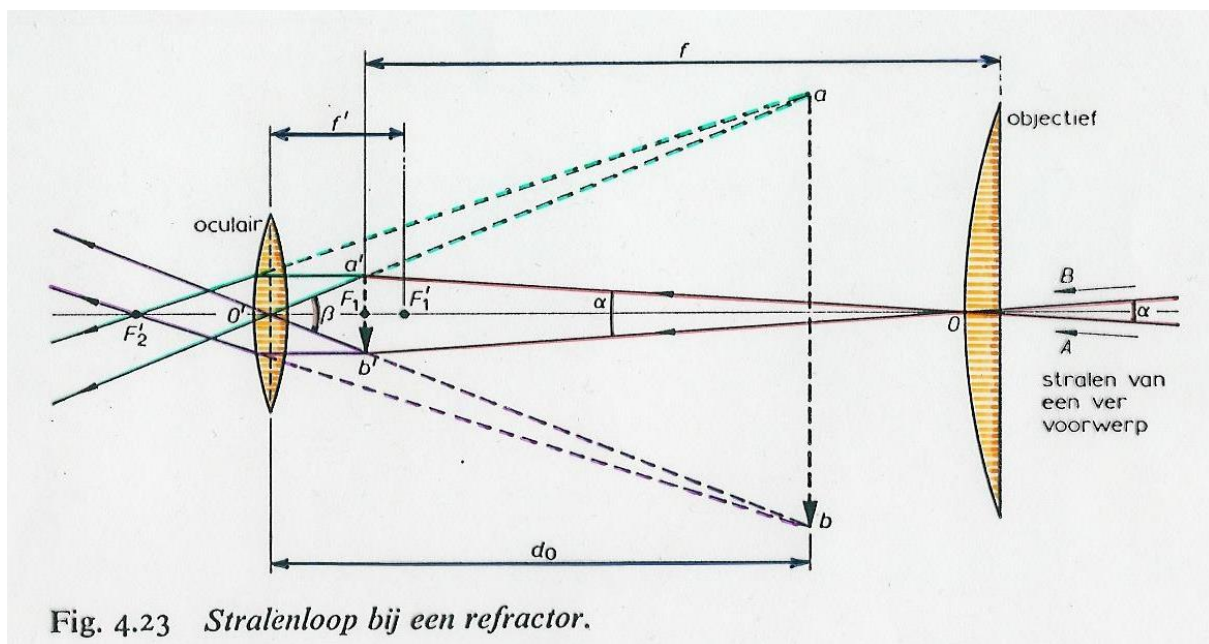


Fig. 4.23 *Stralenloop bij een refractor.*

De figuur toont een refractor. Hier is niet de lineaire of dwarse vergroting van belang (het beeld is steeds kleiner dan het voorwerp), maar de hoekvergroting $M = \beta/\alpha$ (let op de gewijzigde notatie !).

Omdat het beeld veel dichterbij het oog ligt dan het voorwerp, is $\beta \gg \alpha$ en daardoor lijkt het beeld groter. Omdat α en β kleine hoeken zijn (de afstand van $a'b'$ tot O' is vrijwel f' en $\beta \approx \frac{a'b'}{f'}$), volgt makkelijk uit de figuur dat $M = f/f'$. Om een grote vergroting te bereiken,

moet dus $f \gg f'$ zodat de lengte van het toestel praktisch f is.

De vergroting van een astronomische refractor wordt beperkt door het scheidend vermogen van het objectief en van het oog van de waarnemer.

Voor een objectief met diameter D is het scheidend vermogen (hier gedefinieerd als de hoek tussen de stralen naar twee punten van het voorwerp die in het beeld $a'b'$ nog net gescheiden waargenomen kunnen worden) zoals in de fysische optica bewezen :

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (5.51)$$

Anderzijds is het scheidend vermogen van het oog $0.01 \text{ cm}/25 \text{ cm} = 0.0004 \text{ rad}$ (zie figuur).

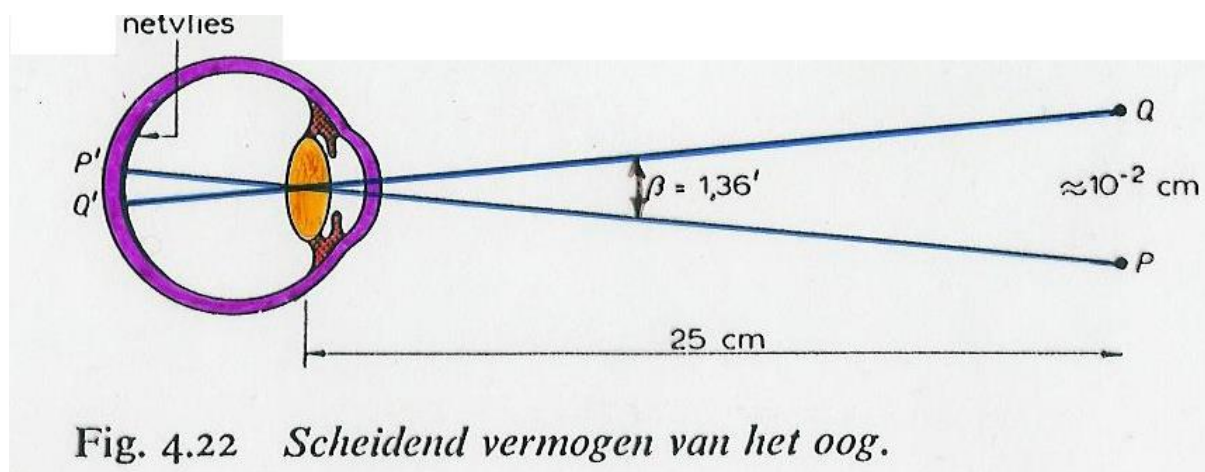


Fig. 4.22 *Scheidend vermogen van het oog.*

De maximale bruikbare vergroting van een refractor is dus :

$$M = \frac{4 \cdot 10^4 D}{1.22 \lambda} \approx 3.3 \cdot 10^4 \frac{D}{\lambda} \quad (5.52)$$

Voor licht met $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, vinden wij $M = 660D$, als voor D de getalwaarde in meter wordt genomen. Bij de Yerkes-telescoop (grootste refractor) is D één meter en vinden we dus ongeveer een honderdste boogseconde.

Bij een reflector of spiegeltelescoop is het objectief een holle parabolische spiegel die in zijn brandpunt een beeld vormt dat vrij is van sferische aberratie. Eén der grootste monospculaire reflectoren staat in Mount Palomar en heeft een diameter van 5 m en een vergroting van de orde van 3500.

V.15. BEGINSSEL VAN FERMAT

Men kan de loop van een lichtstraal ook berekenen via het zogenaamde beginsel van Fermat, dat als volgt kan geformuleerd worden : de tijd waarin een lichtstraal van een punt A naar een punt B loopt, heeft een extremale waarde.

Het extremum is gewoonlijk een minimum maar kan soms ook een maximum zijn. Het principe van Fermat heeft geen betrekking op absolute minima maar op relatieve. Om deze te bepalen, maken we gebruik van variatierekening.

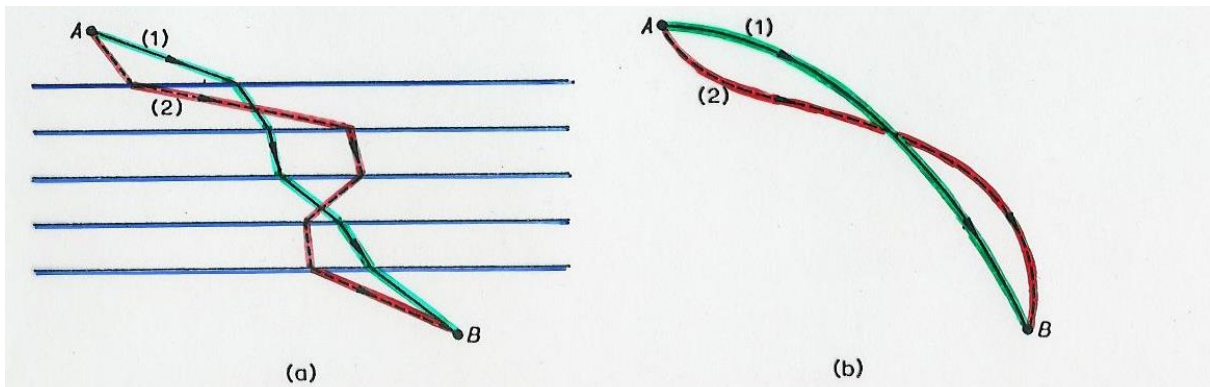
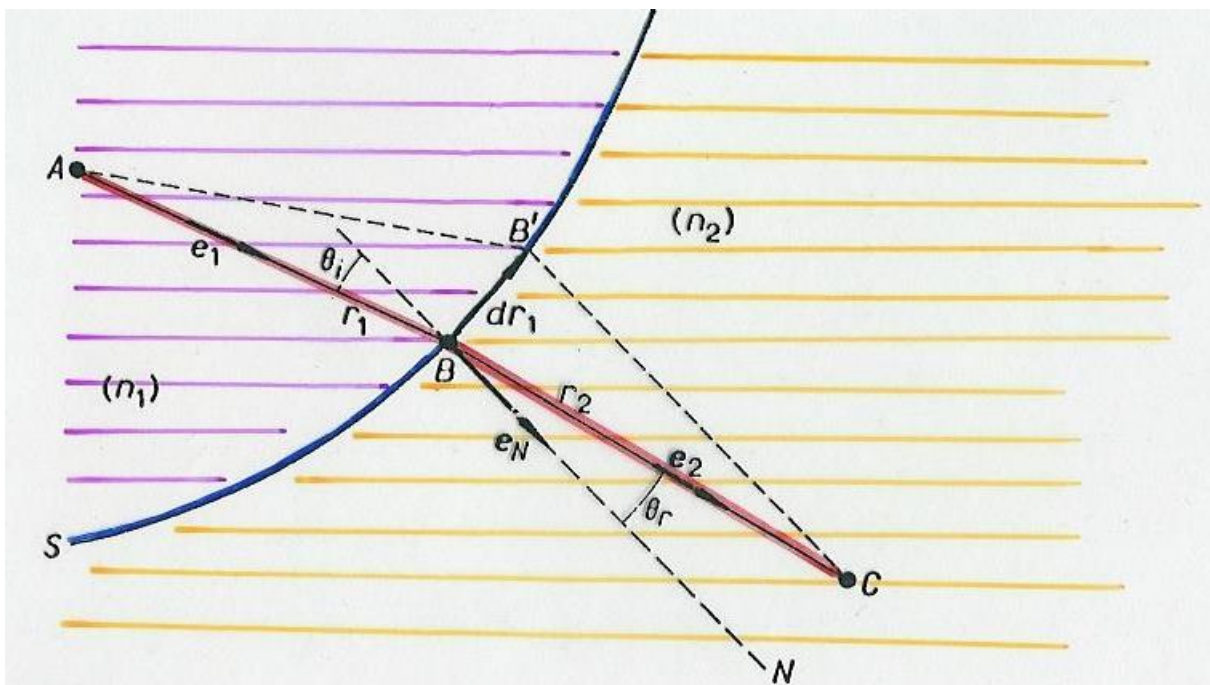


Fig. 4.32 *Vergelijking van de werkelijke baan van licht tussen twee punten met een denkbeeldige naburige baan.*

Als voorbeeld vragen we ons af of de brekingswet van Snel in overeenstemming is met dit principe.



$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c}(n_1 r_1 + n_2 r_2) \quad \text{daar } v = c/n \quad (5.53)$$

Volgens het beginsel van Fermat moet gelden :

$$dt = d\left(\frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2}\right) = \frac{1}{c}(n_1 dr_1 + n_2 dr_2) = 0 \quad (5.54)$$

waarin dt de verandering is van t voor naburige banen, zoals $AB'C$ waardoor r_1 en r_2 resp. met dr_1 en dr_2 veranderen. Nu is :

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad \text{en} \quad r dr = \vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (5.55)$$

$$dr = \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e} \cdot d\vec{r} \quad (5.56)$$

waarin \vec{e} de eenheidsvector volgens \vec{r} is. Dus :

$$dr_1 = \vec{e}_1 \cdot d\vec{r}_1 \quad \text{en} \quad dr_2 = \vec{e}_2 \cdot d\vec{r}_2 \quad (5.57)$$

Maar,

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \text{constant} \quad (5.58)$$

zodat :

$$dr_2 = -\vec{e}_2 \cdot d\vec{r}_1 \quad (5.59)$$

Dit leidt met (5.54) tot :

$$(n_1 \vec{e}_1 - n_2 \vec{e}_2) \cdot d\vec{r}_1 = 0 \quad (5.60)$$

De vector $d\vec{r}_1$ ligt in het raakvlak aan S in B, zodat de vector $n_1 \vec{e}_1 - n_2 \vec{e}_2$ evenwijdig loopt met normaal \vec{e}_N aan S in B. De invallende en gebroken straal liggen dus in één vlak met de normaal. Verder is het vectorieel product van twee evenwijdige vectoren nul, zodat :

$$(n_1 \vec{e}_1 - n_2 \vec{e}_2) \times \vec{e}_N = 0 \quad (5.61)$$

Hieruit volgt zonder veel problemen de wet van Snel.

Nuttige Applets

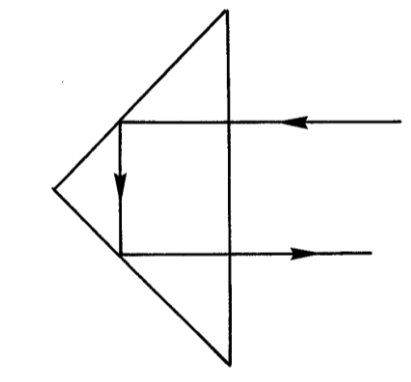
<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/aberrations/spherical/index.html>

<https://www.compadre.org/Physlets/>

https://www.compadre.org/Physlets/optics/illustration35_1.cfm

Vraagstukken

1. Prisma's worden onder andere gebruikt om lichtstralen in een andere richting af te buigen. Men maakt dan gebruik van totale inwendige terugkaatsing. Geef de voorwaarde waaraan de brekingsindex van onderstaand, rechthoekig prisma moet voldoen, om de stralengang mogelijk te maken.



2. Een lichtstraal valt in op een glasplaat. Stel $n_1=1$, $n_2=n$ en t = de dikte van de glasplaat. Alle hoeken worden uitgedrukt in radialen.

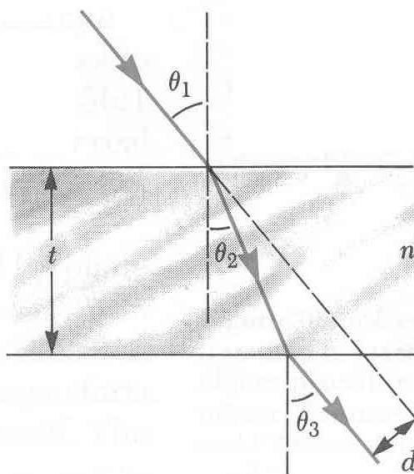
a) Toon aan dat $\theta_1 = \theta_3$.

b) Toon aan dat de laterale afwijking van de lichtstraal nadat het door de plaat is

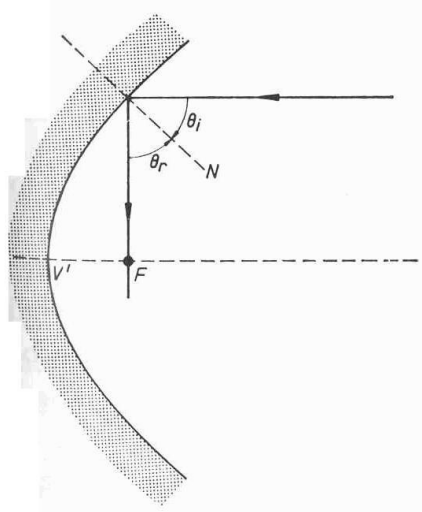
gegaan, gegeven wordt door $d = t \sin \theta_1 \left(1 - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right)$.

c) Als de invalshoek θ klein wordt gehouden, bewijs dan de volgende benadering :

$$d = t \theta \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

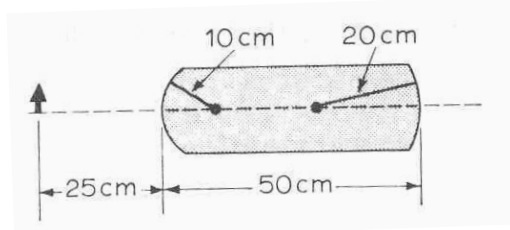


3. Een holle spiegel heeft een kromtestraal $r = 60$ cm. Bereken de beeldpositie en vergroting van een object geplaatst op (a) 90 cm en (b) 20 cm van de spiegel. Teken stralendiagramma om voor beide gevallen het beeld te bekomen.
- a) 45 cm, $-1/2$ b) -60 cm, +3
4. Bewijs dat bij een parabolische spiegel alle stralen, die evenwijdig met de as invallen, na reflectie door het brandpunt lopen, ongeacht hun afstand tot de as.

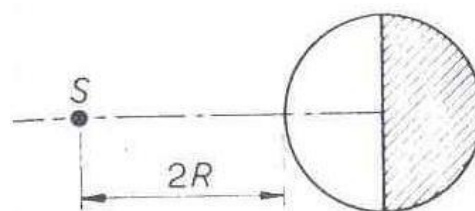


5. Een hol oppervlak met een kromtestraal van 0.5 m scheidt twee media met brekingsindices 1.2 en 1.6. Een voorwerp staat in het eerste medium op 0.8 m afstand van het oppervlak. Bereken de brandpuntsafstanden, de plaats van het beeld en de vergroting.
- (-1.5m, -2m, -0.696m, 0.65)
6. Kroonglas heeft een brekingsindex van 1,523 voor blauw licht en een index van 1,517 voor rood licht. Wanneer een lens uit kroonglas een brandpuntsafstand heeft van 1 m voor rood licht, wat is dan de brandpuntsafstand van deze lens voor blauw licht ?
- (0.9885 m)
7. Geef een uitdrukking voor f van een lens, in functie van r' , r'' , n_1 en n_2 . Stel nu de brekingsindex van de lucht, n_1 , gelijk aan 1, en herschrijf de formule ifv n . Wat gebeurt er met f indien $r' = r''$?
8. Een lens heeft een brandpuntsafstand van $f = 0,1$ m. Zoek de beeldpuntsafstand als het voorwerp op 0,5 m en op 0,08 m van de lens staat.
9. Een cilindrische glazen staaf ($n = 1.5$) heeft aan de einden twee convexe boloppervlakken met kromtestralen van 10 cm en 20 cm. De afstand tussen de twee toppen is 50 cm. Een pijl met lengte van 1 mm staat loodrecht op de as van de staaf op 25 cm afstand van het eerste boloppervlak.
- Bereken (a) plaats en grootte van het beeld gevormd door het eerste boloppervlak

- (b) plaats en grootte van het beeld gevormd door beide boloppervlakken. Vermeld of de beelden reëel of virtueel zijn. Bereken ook de totale vergroting.



10. Een massieve glazen bol ($n = 1.5$) met straal R is voor de helft verzilverd. Een klein voorwerp bevindt zich op de middellijn door de top van de onverzilverde helft van de bol en op een afstand $2R$ van deze top. Bepaal de plaats van het eindbeeld nadat alle terugkaatsingen en brekingen hebben plaatsgehad.



11. Laat zien dat bij een sferisch brekend oppervlak, dat twee stoffen met brekingsindices n_1 en n_2 scheidt, geldt $x_1 x_2 = f_1 f_2$, waarbij x_1 de afstand van het voorwerp tot het eerste brandpunt en x_2 de afstand van het beeld tot het tweede brandpunt is.
12. Twee dunne lenzen met brandpuntsafstand $f_1 = 10$ cm en $f_2 = 20$ cm bevinden zich op een afstand van 20 cm. Een object wordt 15 cm voor de eerste lens geplaatst. Vind de positie van het finaal beeld en de vergroting van het systeem.

